$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 14ème Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 1.1 MISE À JOUR LE 31 JANVIER 2024

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent jamais, à la connaissance du jury, de solution complète mais sont accessibles à des élèves de lycée, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des équipes qu'elles résolvent entièrement un problème, mais qu'elles en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés, démontrent des éléments et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

 En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateurs à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

Mots-clés :
1. Combinatoire 2. Optimisation, arithmétique 3. Systèmes dynamiques 4. Analyse, suites 5. Géométrie 6. Probabilités 7. Géométrie, analyse 8. Combinatoire, arithmétique

Notations

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$[a,b]$	ensemble des nombres réels compris entre a et b inclus
$]a,b[$	ensemble des nombres réels compris entre a et b exclus
$[a,b] \cup [c,d]$	ensemble des nombres réels compris entre a et b ou entre c et d inclus
$\min_{x \in X} f(x)$	plus petite valeur prise par $f(x)$ quand x parcourt l'ensemble X
$\lceil x \rceil$	plus petit entier supérieur ou égal au réel x
$PGCD(u,v)$	plus grand entier positif divisant à la fois u et v
$PPCM(u,v)$	plus petit entier positif divisible à la fois par u et v

1. Triominos

Soit $n \geqslant 1$ un entier, fixé dans la suite du problème. Alexander a des pièces triangulaires, appelées triominos. Sur chaque triomino, trois nombres entre 1 et n sont inscrits, un sur chaque côté. Un même nombre peut apparaître plusieurs fois sur un triomino.

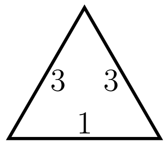


FIGURE 1 – Un exemple de triomino avec sur les côtés les valeurs 1, 3 et 3.

Alexander décide de placer les triominos les uns à côté des autres dans le plan, de sorte que les numéros écrits sur deux côtés adjacents coïncident toujours. On appelle cela une **configuration**.

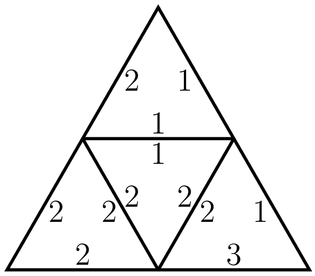


FIGURE 2 – Exemple de configuration possible.

Deux triominos sont considérés comme identiques si on peut obtenir l'un à partir de l'autre par rotation. En revanche, on ne peut pas retourner un triomino (c'est-à-dire lui appliquer une symétrie axiale).

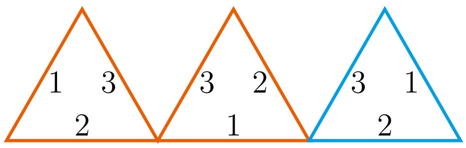


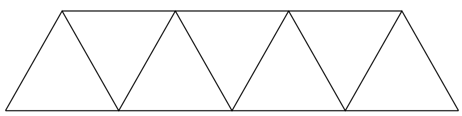
FIGURE 3 – Les deux triominos oranges sont identiques, mais le triomino bleu est différent.

Alexander possède un jeu complet de triominos, composé d'un unique exemplaire de chaque triomino possible en utilisant les nombres de 1 à n.

1. Combien Alexander possède-t-il de triominos ?

2. Pour quelles valeurs de n Alexander peut-il trouver une configuration utilisant toutes les pièces ?

Alexander souhaite disposer ses triominos en ligne droite, de la façon suivante :



3. Pour quelles valeurs de n Alexander peut-il disposer tous les triominos en ligne droite ? On pourra commencer par traiter les cas $n = 2, 3, 4$.

Désormais, les nombres ne sont plus écrits sur les côtés mais sur les sommets des triangles. Alexander souhaite donc que les nombres écrits sur deux sommets adjacents coïncident.

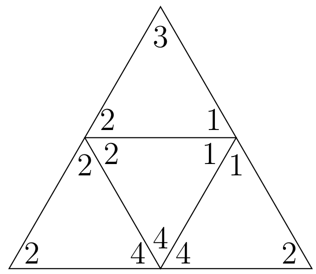


FIGURE 4 – Exemple de configuration possible.

On suppose pour commencer que parmi les trois nombres qui apparaissent sur chaque pièce, il y en a au plus deux différents (il y en a donc un qui apparaît au moins deux fois).

4. Reprendre les questions **1.** à **3.** dans ce cadre.

Maintenant les trois nombres aux sommets des pièces triangulaires sont quelconques, toujours compris entre 1 et n.

5. Reprendre les questions **1.** à **3.** dans ce cadre.

6. Estimer, en fonction de n, la taille du plus grand losange plein qu'Alexander peut former avec ses triominos.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

2. Rassemblements mathématiques

Lors d'un tournoi de mathématiques, des jeunes mathématiciennes et mathématiciens se rencontrent. Perrine doit définir des **plans de placements** pour les repas, c'est-à-dire définir chaque jour qui s'assiéra où. Elle souhaite que les participants se mélangent au maximum au moment des repas donc élaborer un plan de placement des participants sur plusieurs jours de sorte que chacun ait mangé au moins une fois avec tous les autres. Un tel plan est dit **idéal**.

Dans la salle à manger, il y a t tables, chacune avec $p \geqslant 2$ places. Au total, $n = tp$ personnes participent à l'olympiade et prennent r repas ensemble.

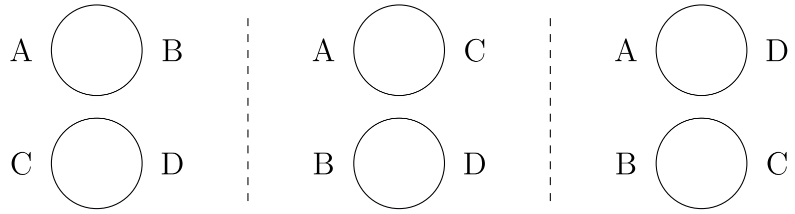


FIGURE 5 – Exemple de plan de placement idéal pour $p = 2$, $t = 2$, $r = 3$ avec quatre participants A, B, C et D.

1. Perrine peut-elle toujours trouver un plan idéal si $r = \lceil (n-1)/(p-1) \rceil$? Que se passe-t-il si on a $r < \lceil (n-1)/(p-1) \rceil$?

2. Donner le r minimal permettant de construire un plan idéal et décrire ce plan dans les cas suivants :

a) si $p = 2$ et $t = 3$,

b) si $t = p = 3$,

c) si $t = 3$ et $p = 6$,

d) si $t = 2$ et p quelconque.

3. Estimer la valeur minimale de r permettant de construire un plan idéal et décrire ce plan dans les cas suivants :

a) si $t = p$ (on pourra commencer par regarder les cas où p est un nombre premier ou une puissance de nombre premier) ;

b) si t est une puissance de p.

4. Proposer d'autres plans idéaux dans le cas général.

Pour éviter que les participants ne se lassent, Perrine essaie d'uniformiser le plan : elle veut faire en sorte que deux participants quelconques ne se retrouvent pas plus de f fois à la même table, où $f \geqslant 1$. Un tel plan est dit **f-uniforme**.

5. Décrire les valeurs de p et t pour lesquelles on peut trouver un plan idéal 1-uniforme.

6. Existe-t-il toujours un plan idéal 2-uniforme ? Plus généralement, existe-t-il une valeur de f telle qu'il existe un plan idéal f-uniforme quels que soient p et t ?

7. Estimer, en fonction de p et t, la valeur minimale de f pour laquelle il existe un plan idéal f-uniforme. On pourra reprendre les cas particuliers proposés précédemment.

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

3. Tournoi de ping–pong

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Dans un club de ping-pong, il y a $2n$ joueuses numérotées de 1 à $2n$. On suppose que les joueuses sont classées de la plus forte à la moins forte, de sorte que quand les joueuses i et j s'affrontent en match, si $i < j$, alors la joueuse i gagne toujours contre la joueuse j. Les matchs ont lieu sur n tables numérotées de 1 à n. On appelle **configuration** une manière de répartir les $2n$ joueuses sur les n tables de sorte qu'il y ait exactement 2 joueuses à chaque table.

Au départ, les joueuses sont dans une configuration initiale puis elles jouent par tours successifs. Un tour se déroule de la manière suivante : à chaque table, les deux joueuses présentes s'affrontent puis pour tout numéro de table k, la gagnante de la table k monte à la table $k-1$ (sauf si $k = 1$, auquel cas elle reste à la table 1), et la perdante de la table k descend à la table $k+1$ (sauf si $k = n$, auquel cas elle reste à la table n). On dira qu'une table est plus **haute** qu'une autre si son numéro est plus petit que l'autre.

Une configuration est dite **stable** si après deux tours, les joueuses se retrouvent dans la même configuration.

1. On fixe $1 \leqslant i \leqslant 2n$. Quelle est la table la plus haute à laquelle peut se trouver la joueuse i dans une configuration stable ? Et la plus basse ?

2. Compter le nombre de configurations stables en fonction de n.

3. Les joueuses atteignent-elles toujours une configuration stable après un nombre de tours suffisants ? Dans ce cas, donner un encadrement en fonction de n du plus grand nombre possible de tours qui peuvent être nécessaires pour atteindre une configuration stable.

4. Soient $1 \leqslant i \leqslant 2n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$. On sait que la joueuse i doit commencer à la table k. En supposant qu'elle puisse choisir le reste de la configuration initiale comme cela l'arrange, quelle est la plus haute table qu'elle peut espérer atteindre au moins une fois ?

Tour 1	Tour 2	Tour 3
2 7	2 5	1 2
5 8	1 7	3 5
1 4	3 8	4 7
3 6	4 6	6 8

Figure 6 – Un exemple avec $n = 4$. Notons que la configuration atteinte au tour 3 est stable.

5. On se donne $1 \leqslant k < l \leqslant n$. En fonction de k et l, est-il possible qu'une joueuse commence à la dernière table, atteigne la table k puis se stabilise plus tard à la table l ?

6. Les joueuses tiennent un carnet où elles notent leurs résultats sous la forme suivante : quand elles remportent un match, elles écrivent un V, et quand elles perdent, elles écrivent un D. Par exemple, si une joueuse remporte ses deux premiers matchs puis perd les trois suivants, elle écrira le mot $VVDDD$. On dit qu'un mot formé de lettres D et V est **inscriptible** si il existe une configuration initiale à $2n$ joueuses dans laquelle une des joueuses écrira ce mot. Par exemple, le mot $VV...V$ est toujours inscriptible car il sera inscrit par la joueuse 1.

a) Donner des exemples de mots inscriptibles et de mots non inscriptibles.

b) En fonction de n, estimer le plus grand ℓ pour lequel tous les mots de longueur ℓ sont inscriptibles.

c) En fonction de n et ℓ, estimer le nombre de mots inscriptibles de longueur ℓ.

7. Parmi toutes les configurations initiales, estimer la proportion des configurations qui font que la joueuse 3 n'atteindra jamais la table 1. Généraliser en changeant les numéros de la joueuse et de la table.

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

4. Dépollution de la Seine

Pour les épreuves de natation des Jeux Olympiques de 2024, certains bassins, alimentés par la Seine, doivent être dépollués.

Une équipe de biologistes a trouvé une bactérie qui est capable de dépolluer l'eau. Initialement, le bassin, de volume $V = 2500\,m^3$, ne contient que de l'eau polluée. Le matin du jour où le nettoyage commence (qu'on appelle le jour 0), on largue des bactéries dans le bassin. Les bactéries n'occupent pas forcément toute l'eau du bassin : il y a de l'eau avec bactéries et de l'eau sans bactéries, qui ne se mélangent pas. On note $v_0 \in [0, V]$ le volume d'eau avec bactéries après le premier largage des bactéries. Pour $T \in \mathbb{N}$, on notera v_T le volume occupé par les bactéries le matin du jour T. La population de bactéries se comporte de la manière suivante :

— Les bactéries qui sont dans de l'eau polluée à midi mangent la pollution. Ainsi, l'eau polluée avec bactéries devient de l'eau propre avec bactéries.

— Au coucher du soleil, les bactéries se reproduisent. Les bactéries mères meurent en se reproduisant. Les bactéries filles occupent un volume d'eau $f\left(v_T\right)$ dont on ne connaît pas la répartition dans le bassin, avec $f : [0, V] \to [0, V]$ une fonction décrite plus bas.

— Jusqu'à minuit, les bactéries peuvent se déplacer dans le bassin. La manière dont elles se déplacent varie selon les questions et sera précisée.

— À minuit, si une bactérie se retrouve dans de l'eau propre, alors elle meurt instantanément. Ainsi, l'eau propre avec bactéries devient de l'eau propre sans bactéries. Si la bactérie se retrouve dans de l'eau polluée, alors elle reste immobile (le volume d'eau polluée avec bactérie reste inchangé).

Dans des conditions idéales, une bactérie produit en moyenne K bactéries filles. En pratique, lorsqu'il y a trop de bactéries, elles se gênent mutuellement, de sorte que la moyenne est un peu plus basse. On prend donc

$$f(v) = K\left(v - \frac{v^2}{V}\right).$$

1. Quelles sont les valeurs possibles de K qui garantissent que si $0 \leqslant v_0 \leqslant V$, alors $0 \leqslant v_T \leqslant V$ pour tout T ?

Désormais, pour simplifier, on prend

$$f(v) = \begin{cases} Kv \text{ si } 0 \leqslant Kv \leqslant V, \\ V \text{ sinon,} \end{cases}$$

où K est une constante strictement positive. Autrement dit, on considère que le terme $-v^2/V$ est négligeable. Dans la question **7.**, on traitera le cadre sans cette simplification.

2. On suppose dans cette question que les bactéries filles se déplacent en priorité dans l'eau polluée, puis dans l'eau propre pour celles qui n'ont plus de place dans l'eau polluée. Autrement dit, le volume d'eau propre avec bactéries est le plus petit possible (sachant que les volumes sont fixes lors du déplacement). Pour quelles valeurs de K et de v_0 les bactéries nettoient-elles entièrement le bassin ? Dans ce cas-là, combien de jours faut-il pour dépolluer entièrement le bassin ?

3. Inversement, on suppose dans cette question que les bactéries filles se déplacent en priorité dans l'eau propre, puis dans l'eau polluée pour celles qui n'ont plus de place dans l'eau propre (celles qui sont nées dans l'eau propre mourront donc à minuit sans se reproduire le lendemain midi).

a) Étudier l'évolution de la suite v_T. A-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

b) Si $K \leqslant 2$, pour quelles valeurs de v_0 les bactéries dépolluent-elles entièrement le bassin ?

c) Si $K = 4$, pour quelles valeurs de v_0 les bactéries dépolluent-elles entièrement le bassin ?

d) Étudier les cas $K > 4$ et $2 < K < 4$.

e) Dans les différents cas précédents, encadrer aussi précisément que possible le nombre de jours nécessaires pour que les bactéries dépolluent entièrement le bassin.

On suppose maintenant que l'eau du bassin est brassée entre le coucher du soleil et minuit. À minuit, les bactéries se trouveront donc proportionnellement réparties dans l'eau propre et polluée : si l'eau propre et l'eau polluée occupent respectivement un volume $a_T V$ et $b_T V$ dans le bassin (où $a_T + b_T = 1$), alors les volumes de bactéries dans l'eau propre et polluée seront respectivement $f(v_T)\, a_T$ et $f(v_T)\, b_T$.

4. Trouver des conditions nécessaires et/ou suffisantes sur K et v_0 pour que les bactéries dépolluent entièrement le bassin.

L'eau du bassin est toujours brassée mais désormais, chaque jour, entre midi et le coucher du soleil, un volume $w \in [0, V]$ d'eau s'évapore. Elle est remplacé par la même quantité d'eau polluée au coucher du soleil avant le brassage. La proportion d'eau polluée dans l'eau évaporée est la même que celle dans le bassin : si l'eau propre et l'eau polluée occupent respectivement un volume $a_T V$ et $b_T V$ dans le bassin (où $a_T + b_T = 1$) alors les volumes d'eau propre et polluée évaporés sont $a_T w$ et $b_T w$ respectivement.

5. On note u_T, avec $0 \leqslant u_T \leqslant V$, le volume d'eau propre dans le bassin le matin du jour T. Trouver des conditions nécessaires/suffisantes sur K, w et v_0 pour que :

a) la suite (u_T) admette une limite, et estimer la limite en fonction de K, w et v_0 ;

b) la suite (u_T) soit périodique, et estimer la période en fonction de K, w et v_0.

Étudier le plus généralement possible la suite u_T.

Pour cette question, on suppose que l'eau est brassée, qu'il n'y a plus d'évaporation mais que la reproduction des bactéries varie selon la météo. S'il fait beau, on a $f(v_T) = K_1 v_T$ et s'il pleut, on a $f(v_T) = K_2 v_T$ avec $K_1 > K_2 > 0$ (avec toujours $f(v_T) = V$ si $K_1 v_T > V$ ou $K_2 v_T > V$). Il pleut exactement un jour sur deux : s'il pleut le jour T, alors il fera beau le jour $T+1$ et il pleuvra le jour $T+2$. Le jour $T = 0$, il fait beau.

6. Trouver des conditions nécessaires et/ou suffisantes sur K_1, K_2 et v_0 pour que le bassin soit entièrement dépollué.

7. On revient pour finir dans le cas général exact où $f(v) = K\left(v - \dfrac{v^2}{V}\right)$. Décrire le comportement de la suite v_T dans le contexte des questions **2.**, **3.**, **4.** selon la valeur de K.

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

5. Électron libre

Nicolas joue dans un laboratoire de physique. Il dispose d'un canon à électrons immergé dans un champ magnétique constant uniforme. Les lois de la physique classique nous renseignent alors que l'électron se déplace alors à vitesse constante en décrivant un cercle dans le sens trigonométrique, que l'on supposera de rayon 1.

Nicolas dispose également d'un bouton qui permet de faire faire demi-tour à l'électron : au moment où il appuie, la vitesse de l'électron reste la même mais dans la direction opposée. Il essaye ainsi, à l'aide de cette seule commande, de guider l'électron.

La figure 7 représente une trajectoire possible de l'électron. Le rectangle bleu est le canon à électrons, la flèche bleue est la direction initiale, les points orange sont les demi-tours provoqués par Nicolas. Les pointillés montrent le prolongement de deux arcs de cercle décrits par l'électron.

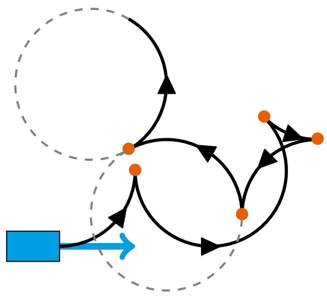


FIGURE 7 – Un exemple de trajectoire de l'électron.

1. Le canon à électrons est situé en un point A du plan. Nicolas peut choisir sa direction initiale. Il veut amener l'électron tiré jusqu'en un autre point B.

a) Nicolas peut-il toujours guider l'électron du point A au point B ? Si oui, combien de fois au minimum doit-il appuyer sur le bouton, en fonction de la distance qui sépare A et B ?

b) Quelle est la distance minimale parcourue par l'électron pour aller de A à B ?

Nicolas dessine un cercle de rayon $r > 0$ et place le canon à électrons sur le bord du cercle, pointé vers son centre. Il veut faire en sorte que l'électron ne touche jamais le cercle après l'instant initial.

La figure 8 représente un exemple de trajectoire dans un cercle de rayon $r = 2$. Il ne touche jamais le cercle gris et, après deux demi-tours, tourne sur lui-même indéfiniment.

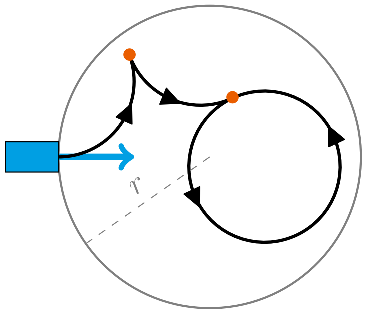


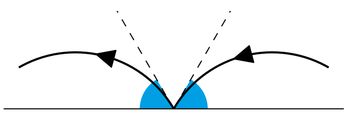
FIGURE 8 – Un exemple de trajectoire de l'électron dans un cercle de rayon $r = 2$.

2. Pour quelles valeurs du rayon r du cercle Nicolas peut-il appuyer un nombre fini de fois sur le bouton et s'assurer que l'électron ne touche jamais le cercle ? Dans ce cas, combien de fois au minimum Nicolas doit-il appuyer sur le bouton pour s'assurer que l'électron ne touche jamais le cercle, en fonction de r.

3. Nicolas place n points strictement à l'intérieur d'un disque de rayon 1. Il peut choisir librement l'emplacement et la direction du canon. L'électron peut rentrer et sortir du disque, celui-ci n'a aucune influence sur sa trajectoire. Estimez le plus petit entier N tel que quelle que soit la position des n points, Nicolas peut s'assurer que l'électron passe par ces n points en appuyant au plus N fois sur le bouton. Que se passe-t-il avec un disque de rayon $R > 0$ quelconque ?

4. Nicolas dispose, dans cette question seulement, de k canons à électrons disposés de manière quelconque sur le plan, et de k boutons permettant de contrôler chaque électron indépendamment. Peut-il toujours faire en sorte que, après un certain temps, les k électrons se trouvent au même endroit au même moment ?

Maintenant, Nicolas ne dispose plus d'un bouton pour faire faire demi-tour à l'électron mais de miroirs sur lesquels l'électron rebondit, conformément aux lois de la physique classique : les angles d'incidence et de réflexion sont les mêmes.



Il les dispose de sorte à former un polygone convexe, c'est-à-dire dont tous les angles intérieurs sont de mesure strictement comprise entre 0 et π. On suppose que l'électron est tiré de sorte qu'il ne passe jamais par un des sommets du polygone.

Un polygone convexe est dit **admirable** si Nicolas peut faire rebondir l'électron sur les côtés du polygone dans n'importe quel ordre. Autrement dit, pour n'importe quelle numérotation des côtés du polygone avec les entiers de 1 à M, il est possible de placer le canon à électrons de sorte que l'électron rebondisse sur le côté 1 puis 2 et ainsi de suite jusqu'à M.

La figure 9 représente un quatrilatère (en orange) dont on a numéroté les côtés et une trajectoire possible d'un électron qui respecte cet ordre : il rebondit successivement sur les côtés 1 puis 2 puis 3 puis 4. Pour que ce polygone soit admirable, il faudrait pouvoir faire la même chose quels que soient les numéros attribués aux côtés de ces polygones.

5. Pour quels M le polygone régulier à M côtés dont les sommets sont sur un cercle de rayon 1 est-il admirable ?

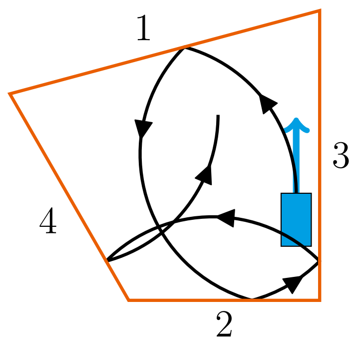


Figure 9 – Un exemple de numérotation des côtés d'un quadrilatère et une trajectoire possible pour l'électron respectant cet ordre.

6. Pour quels $M \geqslant 3$ Nicolas peut-il construire un polygone admirable à M côtés ?

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

6. Pièces truquées

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Félix et Clara jouent à un jeu de pile ou face. Félix possède une pièce truquée qui tombe sur pile avec probabilité $p \in [0,1]$. Le jeu se déroule de la manière suivante : Félix lance une première fois la pièce, puis Clara essaye de prédire le résultat du lancer suivant, Félix lance à nouveau la pièce, Clara fait une prédiction et ainsi de suite. Si on numérote les lancers de 0 à n, Félix lance donc $n+1$ fois la pièce (on suppose les lancers indépendants) et Clara fait n prédictions pour les lancers 1, 2,..., n. Les $n+1$ lancers et les n prédictions constituent une **partie**.

Un exemple de partie, pour $n = 2$, est :

- Félix tire pile,
- Clara prédit face,
- Félix tire face,
- Clara prédit pile,
- Félix tire face.

Dans ce cas, Clara a fait une première prédiction juste et une deuxième prédiction fausse.

1. On suppose dans cette question que Clara gagne un point par prédiction juste. Son nombre total de points à la fin de la partie est appelé son **gain**. Quelle est l'espérance de son gain si sa prédiction est :

a) toujours pile ?

b) le résultat du lancer précédent ?

c) pile si le nombre de piles déjà tirés est pair, face sinon ?

Maintenant Clara veut maximiser ses chances d'obtenir un bon score. Elle ne connaît pas la valeur de p mais elle sait que $p \in \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est un sous-ensemble de $[0,1]$.

Une **stratégie** pour Clara est une manière de choisir quelle prédiction elle va faire avant le lancer m en fonction des résultats des lancers $0, 1, 2, \ldots, m-1$. La question **1.** donne trois exemples de stratégies. Soit $G_{\mathcal{S},p}$ le gain (aléatoire) obtenu pour la stratégie $\mathcal{S}$, avec p la probabilité que la pièce tombe sur pile. On définit le **gain minimal espéré** pour la stratégie $\mathcal{S}$ comme $\mathcal{G}_{\mathcal{S},\mathcal{P}} = \min_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E}(G_{\mathcal{S},p})$. Autrement dit, $\mathcal{G}_{\mathcal{S},\mathcal{P}}$ est l'espérance du gain apporté par la stratégie $\mathcal{S}$ pour la pire des valeurs de $p \in \mathcal{P}$, c'est-à-dire pour celle où ce gain espéré est le plus bas.

2. Si Félicie n'a aucune information a priori sur la valeur de p, c'est-à-dire que $\mathcal{P} = [0,1]$. Quel est le gain minimal espéré pour les stratégies a), b), c) décrites dans la question **1.** ?

3. Trouver une stratégie $\mathcal{S}$ qui donne le plus grand gain minimal espéré $\mathcal{G}_{\mathcal{S},\mathcal{P}}$ parmi toutes les stratégies possibles (et le calculer) si :

a) si $\mathcal{P} = [0, \frac{1}{3}]$?

b) si $\mathcal{P} = [0,1]$?

c) si $\mathcal{P} = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$?

À partir de maintenant, Félix possède deux pièces, d'apparences indistinguables, qui tombent sur pile avec des probabilités respectives p_1 et p_2. Avant la partie, il choisit au hasard une des deux pièces : il prend la pièce 1 avec probabilité q (donc la pièce 2 avec probabilité $1-q$) puis tire $n+1$ fois la pièce choisie, comme avant. On suppose que Clara connaît les probabilités p_1, p_2 et q (donc les choix de prédictions qu'elle fait peuvent dépendre de p_1, p_2 et q).

4. Quelle est l'espérance du gain de Clara pour les stratégie a), b), c) décrites dans la question **1.** ? Parmi toutes les stratégies possibles, en trouver une pour laquelle l'espérance du gain est la plus grande possible, et la calculer.

Clara n'essaye plus de deviner les résultats des lancers mais plutôt quelle pièce a été choisie. Félix lance une première fois la pièce puis, après chaque lancer, Clara peut choisir de déclarer quelle pièce a été choisie selon elle, auquel cas le jeu s'arrête, ou de demander un lancer supplémentaire, dans une limite de n lancers demandés maximum. Clara gagne α points si sa déclaration est correcte (et aucun point si elle se trompe) et perd 1 point par lancer supplémentaire demandé.

5. Quelle stratégie maximise l'espérance du gain obtenu et que vaut alors ce gain en moyenne ? Que se passe-t-il quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire qu'on ne fixe plus de limite au nombre de lancers demandés) ?

Désormais, Félix possède toujours deux pièces mais change de pièce en cours de route. Avant la partie, il choisit uniformément au hasard un nombre K entre 1 et n (inclus). Il tire la pièce 1 pour les lancers $0, ..., K-1$ et la pièce 2 pour les lancers $K, ..., n$. Clara connaît toujours les probabilités p_1, p_2.

6. Clara doit deviner quel K a été choisi par Félix.

a) Elle annonce sa prédiction après les $n+1$ lancers. Quelle(s) stratégie(s) lui permet(tent) de maximiser la probabilité d'avoir raison et quelle est alors cette probabilité ?

b) Après chaque lancer, Clara peut décider de continuer ou d'annoncer « la pièce a déjà changé », auquel cas le jeu s'arrête. Si elle a raison, elle gagne $n-(m-K)$ points, où m est le numéro du lancer après lequel l'annonce a été faite (0 pour le premier, N pour le dernier). Autrement dit, si elle fait l'annonce après le lancer m, soit $m < K$ et elle ne gagne pas de point, soit $m \geqslant K$ et elle gagne n points mais perd un point par tour de retard de son annonce. Quelle(s) stratégie(s) lui permet(tent) de maximiser l'espérance de son gain et que vaut alors ce gain en moyenne ?

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

7. Drôles de cookies

Fabrice a décidé de faire des cookies aux formes mathématiques pour les goûters du $\mathbb{TFJM}^2$. Il dispose d'une poche à douille qui lui permet de déposer comme il le souhaite de la pâte à cookie dans le plan suivant un nombre fini de segments de ligne droite (le point étant accepté comme exemple de segment de longueur 0). En chaque point P de l'un de ces segments, la poche à douille permet à Fabrice de déposer de la pâte en quantité $R(P) \geqslant 0$ plus ou moins importante.

Lorsqu'elle est au four, la pâte s'étale et remplit le disque de rayon $R(P)$ centré en P pour chaque point P où Fabrice met de la pâte. La pâte de Fabrice ne se repousse pas elle même. Par exemple si le disque de centre P et de rayon $R(P)$ est contenu dans le disque de centre P' et de rayon $R(P')$, alors la pâte s'étalera en un cookie de forme le disque de centre P' et de rayon $R(P')$ uniquement. La forme du cookie après cuisson sera donc la réunion des disques de centre P et de rayon $R(P)$ où P parcourt l'ensemble des points où Fabrice a mis de la pâte.

On appelle **cookie du plan**, ou plus simplement cookie, un ensemble de points du plan telle que la pâte de Fabrice peut s'étaler pour devenir cet ensemble en suivant ce procédé.

La figure 10 représente deux exemples de cookies. Le cookie orange est obtenu en étalant une pâte de rayon constant égal à 1 sur un segment de longueur 1. Le cookie bleu est obtenu à partir d'un segment de pâte de rayon variable et d'un autre point de pâte.

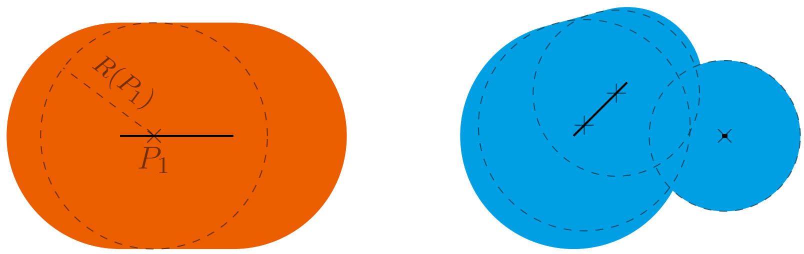


Figure 10 – Deux exemples de cookies.

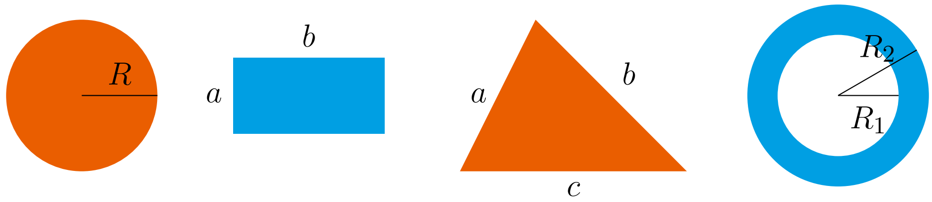
Fabrice aimerait notamment fabriquer les formes de cookie suivantes :

a) un disque de rayon R ;

b) un rectangle plein de côtés de longueurs a et b ;

c) un triangle plein de côtés de longueurs a, b et c ;

d) un anneau de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 (avec $R_2 > R_1$), les deux cercles qui constituent le bord de l'anneau étant inclus dans le cookie.



1. La forme a) est-elle un cookie ? Même question pour chacune des formes b), c) et d).

La **quantité de pâte** utilisée pour faire un cookie est la somme des longueurs des segments où Fabrice place de la pâte.

2. Pour chacune des formes de la question précédente qui sont des cookies, avec quelles quantités de pâte Fabrice peut-il la réaliser ?

La précision de la poche à douille de Fabrice étant limitée, la quantité de pâte qu'il dépose en P ne peut pas être trop petite. Pour un $r \geqslant 0$ fixé, on dit que l'outil de Fabrice est de précision r lorsque $R(P) \geqslant r$ pour tout point P placé par Fabrice. On appelle r-**cookie du plan**, ou plus simplement r-cookie, un cookie que Fabrice peut réaliser avec un outil de précision r. Les réponses aux questions suivantes vont donc dépendre de r.

En particulier, les 0-cookies sont exactement les cookies, et tout r-cookie est un cookie.

3. Reprendre les questions précédentes dans le cas des r-cookies, en fonction de r.

4. On suppose dans cette question que Fabrice réalise un r-cookie sans faire de segment de longueur 0 et tel qu'il est impossible d'obtenir la même forme en utilisant strictement moins de pâte. Est-il possible qu'une répartition différente de la même quantité de pâte permette d'obtenir le même r-cookie, toujous sans segment de longueur 0 ?

Fabrice s'intéresse maintenant à la forme du bord de ses r-cookies. Pour cela on suppose qu'il dispose de deux fonctions continues $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

— elles sont 1-périodiques, c'est-à-dire que $x(t+1) = x(t)$ et $y(t+1) = y(t)$ pour tout t réel,

— pour toutes valeurs de t et t', on a simultanément $x(t) = x(t')$ et $y(t) = y(t')$ si et seulemlent si la différence $t - t'$ est entière.

Fabrice trace dans le plan l'ensemble Γ des points de coordonnées $(x(t), y(t))$, appelé **contour**. Il cherche maintenant à savoir si la partie du plan que le contour délimite (que l'on suppose bien définie) est un r-cookie.

5. Existe-t-il un contour pour lequel x et y sont continues, mais pour lequel la partie délimitée n'est pas un r-cookie ? Si oui, est-ce possible avec x et y dérivables ? Deux fois dérivables ? Trois fois dérivables ?

6. Existe-t-il un contour pour lequel x et y sont continues, qui soit un cookie, mais qui ne soit un r-cookie pour aucun $r > 0$? Si oui, est-ce possible avec x et y dérivables ? Deux fois dérivables ? Trois fois dérivables ?

7. Donner d'autres conditions sur une forme pour que ce soit un r-cookie.

8. Proposer et explorer d'autres pistes de recherche, par exemple en dimension 3.

* * *

8. Création d'un jeu

Anaïs cherche à créer un jeu de société. Ce jeu nécessite de numéroter des cartes avec certaines contraintes. Le jeu est constitué d'un ensemble de $N \geq 2$ cartes comportant chacune un symbole différent. Chaque paire de symboles (différents) est **autorisée** ou **interdite**. On appelle **configuration** l'ensemble des paires autorisées.

Anaïs veut permettre aux joueurs de savoir exactement quelles paires sont autorisées mais plutôt que de donner la liste exhaustive de paires autorisées, elle procède de la façon suivante : elle écrit sur chaque carte un numéro différent entre 1 et N et fournit aux joueurs un manuel avec $2N$ pages dans lequel chaque page comporte le mot « autorisée » ou « interdite » tel que pour connaître le statut d'une paire, il suffit pour les joueurs d'additionner les numéros présents sur les deux cartes et de regarder la page du manuel correspondante. Il est possible que certains numéros de page ne soient pas atteignables comme somme de numéros de cartes. Dans ce cas, ce qui est écrit dessus n'importe pas.

Une configuration est **admissible** s'il est possible pour Anaïs d'effectuer la construction précédente, c'est-à-dire de numéroter les cartes et créer le manuel correspondant.

Un exemple avec $N = 5$ est le suivant : le jeu comporte 5 cartes A, B, C, D, E et les seules paires autorisées sont (A, D) et (C, D). Cette configuration est admissible, car Anaïs peut faire la construction suivante : elle attribue aux cartes A, B, C, D, E les numéros 3, 5, 2, 1, 4 respectivement, et écrit « autorisée » sur les pages 3 et 4 de son manuel et « interdite » sur toutes les autres pages.

1. Pour quels N n'importe quelle configuration est-elle admissible ?

2. Pour quels N n'importe quelle configuration est-elle admissible parmi celles pour lesquelles :

a) chaque carte appartient à au moins une paire autorisée ?

b) chaque carte appartient à au plus une paire autorisée ?

c) chaque carte appartient à au plus deux paires autorisées ?

3. Reprendre les questions **1.** et **2.** si, au lieu de sommer les cartes, les joueurs calculent leur PGCD.

4. Reprendre les questions **1.** et **2.** si, au lieu de sommer les cartes, les joueurs calculent leur PPCM (le manuel a alors N^2 pages).

5. Reprendre les questions **1.** et **2.** si, au lieu de sommer les cartes, les joueurs calculent leur produit (le manuel a alors N^2 pages).

Pour pouvoir construire son jeu quoi qu'il arrive, Anaïs s'autorise à numéroter les cartes avec des nombres deux à deux distincts de 1 à M avec $M \geqslant N$. Une configuration pour laquelle Anaïs peut construire une telle numérotation et un manuel associé est dite dite **M-admissible**.

6. Estimer, en fonction de N, le M minimal pour lequel toute configuration est M-admissible. Donner des exemples de configurations pour lesquelles on peut calculer le M minimal pour lequel elles sont M-admissibles. On s'intéressera aux différents modes de combinaison des cartes (somme, PGCD...).

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *