Finale 2025

Daniel Collignon

17 mai 2025

1 Ficelles

Cherchons le nombre de longueurs $L > 0$ différentes de ficelles.
L vérifie une relation de Pythagore $L^2 = x^2 + y^2$ avec $0 \leqslant x, y \leqslant 2$ entiers.
En raison de la symétrie on peut se restreindre à $x \leqslant y$.
Les 5 couples $(x, y) = (0, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ et $(2, 2)$ génèrent 5 valeurs de L distinctes.
Réponse : 5.

2 Dates

Une fois ôtés 2, 0, 2 et 5 pour écrire l'année, il reste 0, 0, 3 et 4.
Le mois commence donc par 0, et le jour par 0 ou vaut 30.
D'où les trois dates 04/03, 03/04 ou 30/04.
Réponse : 3.

3 Vitrail

Dans le premier rectangle, on dénombre :

- deux losanges entiers
- à droite un demi-losange coupé selon l'axe vertical
- à gauche deux quarts de losange
- en haut et en bas, restent quatre demi-losange coupés selon l'axe horizontal

D'où $2 + 5 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 5$ losanges pour un rectangle.
Par proportionnalité, il faudra $5 \times 6 = 30$ losanges pour le vitrail constitué de six rectangles.
Réponse : 30.

4 Inéquitable

L'initiale désignant le nombre de billes de chacun, nous avons :

- $a+b+c=87$
- $c=2b$
- $a=b+7$

D'où $b+7+b+2b=87$ qui conduit à $b=20$, et le reste en découle.
Réponse : $a=27$, $b=20$, $c=40$.

5 Pièces mathéfiques

Visant un nombre impair maximal de pièces à la sortie, on procède à l'envers, en commençant par 10, et en veillant à maximiser la somme globale en empruntant des salles paires voisines jusqu'à atteindre une salle impaire (pas forcément le 1 après l'entrée), point de départ d'une situation sans pièce dans l'autre sens. Il reste à vérifier qu'un tel chemin est accessible depuis l'entrée en respectant la condition de ne pas repasser par une salle traversée.
Nous trouvons trois chemins de somme 25 :

- 10-6-2-2-4-1 : atteignable dans l'autre sens
- 10-6-2-2-5 : impossible à atteindre car isole la salle 5 de l'entrée
- 10-6-2-7 : atteignable en démarrant par 1-4-2-5

Matou peut emporter au maximum 25 pièces en sortant du manoir.
Réponse : 25.

6 Les fleurs de Rose

Si l'on ne s'arrêtait pas, chaque rangée contiendrait autant de fleurs que son numéro de rang.
Les rangées de tulipes portent les numéros $3t-2$ pour $t \geqslant 1$.
Comme $1+4+7+10=22$, la 25ème tulipe est donc la 3ème et dernière de la 13ème rangée.
Rose a alors planté $1+\cdots+12+3=\frac{12\times 13}{2}+3=78+3=81$ fleurs.
Réponse : 81.

7 Les dominos

Comme $2025 = 3^4 5^2$, on complète avec deux 1, et les huit demi-dominos totalisent $2\times 1+3\times 4+5\times 2=2+12+10=24$.
A une symétrie près, il y a une unique "chaîne" 1-3 3-3 3-5 5-1.
Réponse : 24.

8 Un mini maximum pour Max

Intuitivement le plus grand résultat sera minimal lorsque les trois résultats seront proches.
Si $a \leqslant b \leqslant c$ sont les trois produits de 3 chiffres, alors $a \times b \times c = 1 \times \cdots \times 9 = 9! = 362880$.
71 étant un nombre premier, il ne pourra être obtenu comme produit de 3 chiffres.
Comme $a \times b \times c \leqslant c^3$ et que $70^3 = 343000$, cela prouve que $c \geqslant 72$.
L'exemple $a = 70 = 2 \times 5 \times 7$, $3 \times 4 \times 6 = b = 72 = c = 1 \times 8 \times 9$ montre que le minimax est 72.

Variante suggérée par François SOUPE

Si 1, 2 et 3 ne sont pas chacun dans un tas, alors le tas qui n'en a pas vaut au minimum $4 \times 5 \times 6 = 120$ et celui qui en a deux vaut au maximum $2 \times 3 \times 9 = 54$.
En permutant 3 et 4, on obtient une meilleure solution avec 72 et 90.
1, 2 et 3 sont donc dans trois tas différents.
Pour le tas avec 1, le maximum est $72 = 1 \times 8 \times 9$ et en allouant correctement 4, 5, 6 et 7, on parvient à $70 = 2 \times 5 \times 7$ et $72 = 3 \times 4 \times 6$.
Réponse : 72.

9 Suite de nombres

Examinons les découpages possibles de 41624 pour en déduire le ou les antécédents.
Inutile de considérer un nombre supérieur à $81 = 9 \times 9$.
On écarte 41 premier et 62 double de 31 premier.
Avec un bloc de 4 chiffres non nuls $\overline{abcd}$, les produits $a \times b$, $b \times c$ et $c \times d$ vérifient $(a \times b)(c \times d) \geqslant b \times c$: on écarte ainsi 1-6-2 et 4-16-2.
Il reste deux découpages à étudier :

- 4-1-6-24 : 1 impose 1×1 et la seule possibilité est 41164
- 4-16-24 : $16 = 4 \times 4 = 2 \times 8$, d'où deux possibilités 1446 ou 2283

Réponse : 3 solutions, 1446, 2283 et 41164.

10 La charpente

Comme $AB = AE$, le triangle ABE est isocèle en A, d'où les égalités d'angles $\widehat{AEC} = \widehat{AEB} = \widehat{ABE} = \widehat{ABC} = x$.
Exprimons la somme des angles dans 2 triangles :

- ABC : (1) $\left(180 - \widehat{ACE}\right) + x + 18 = 180$
- AEC, isocèle en E car $AE = CE$: (2) $2\widehat{ACE} + x = 180$

D'où $\widehat{ACE} = x + 18$ d'après (1).
(2) s'écrit alors $2\,(x + 18) + x = 180$.
Finalement $x = 60 - 12 = 48°$.
Remarque : nous n'avons pas eu besoin d'exploiter la symétrie de la figure par rapport à la hauteur issue de A.
Réponse : 48.

11 Une année spéciale

2100 ne convient pas car $\frac{2100}{3} = 700$ n'est pas un carré.
Cherchons une année $\overline{20du}$ divisible par $s = 2 + d + u$, avec $3 \leqslant s \leqslant 20$ puisque $0 + 1 \leqslant d + u \leqslant 9 + 9$, et telle que $\frac{\overline{20du}}{s}$ soit un carré.
Remarque : comme un millésime impair n'est pas multiple de s pair, d et u ne peuvent être simultanément impairs.
Les trois premières valeurs de s s'étudient facilement :

- $s = 3$, on écarte :
  - 2001 qui donnerait un carré se terminant par 7
  - 2010 non divisible par 100
- $s = 4$, divisible par 4, l'année se termine par 20 et devrait être un carré : cela n'est pas le cas car non divisible par 100
- $s = 5$, divisible par 5, l'année se termine par $u = 0 < s$, mais $\frac{2030}{5} = 406$ n'est pas un carré (la dizaine d'un carré se terminant par 6 est impaire)

Ensuite on considère les carrés $100 = \frac{2000}{20} < i^2 < \frac{2100}{6} = 350$, dans le sens décroissant :

- on initialise $q = 6$
- on répète pour $i = 18$ à 11
  - ajuster q en incrémentant par pas de 1 en retenant qi^2 le plus petit entier > 2000
  - si c'est une année débutant par 20, alors on vérifie si s vaut q

i^2	324	289	256	225	196	169	144	121
q	7	7	8	9	11	12	14	17
qi^2	$>$	2023	2048	2025	$>$	2028	2016	2057
s	-	7	14	9	-	12	9	14

Les variantes privilégiant la divisibilité de l'année par la somme de ses chiffres présentent davantage de cas ou de calculs.

- chercher un carré i^2 dans l'intervalle $\left]\frac{2000}{s};\frac{2100}{s}\right[$ en faisant varier s de 3 à 20, puis vérifier si si^2 a s pour somme des chiffres, ou pas : on peut affiner avec un intervalle $\left[\frac{m}{s};\frac{M}{s}\right]$, m étant le plus petit millésime $\overline{20du}$ de somme s fixée, et M le plus grand.

- $2000+10d+u\equiv 0 \pmod{2+d+u}$ entraîne $1998+9d\equiv 0\equiv 1980-9u \pmod{2+d+u}$. D'où $9\,(222+d)\equiv 0\equiv 9\,(220-u) \pmod{2+d+u}$. On fait varier d ou u de 0 à 9 et on vérifie la divisibilité de $222+d$ ou $220-u$ par 2, 3, 5, 7, 11, 13, de manière à récupérer les facteurs premiers parmi 2 à 19 et chercher ainsi les sommes candidates parmi les diviseurs compris entre 3 et 20.

Réponse : 2 solutions, 2023 et 2028.

12 Le carré de l'année

Écrivons les deux additions simultanées sans 0 :

$$\begin{array}{cccc}
 & a & b & c\\
+ & d & e & f\\
+ & g & 6 & h\\
\hline
2 & 0 & 2 & 5
\end{array}
\quad\text{et}\quad
\begin{array}{cccc}
 & c & f & h\\
+ & b & e & 6\\
+ & a & d & g\\
\hline
2 & 0 & 2 & 5
\end{array}$$

Les unités totalisent au moins $6=1+2+3$ et au plus $24=9+8+7$, d'où exactement 15.
Pour pouvoir atteindre 45, la somme des chiffres de 1 à 9, les dizaines totalisent 11 et les centaines 19.
D'où :

- $c+f+h=15=h+6+g$
- $b+e+6=11=f+e+d$
- $a+d+g=19=c+b+a$

Ainsi $b\geqslant 2$ car $a+c\leqslant 9+8$ et $b=5-e\leqslant 4$.
Nous allons examiner trois cas selon la valeur de b en utilisant les relations :

- $e=5-b$
- $d+f=b+6$
- $a+c=19-b$
- $g+h=9=8+1=7+2=5+4$
- $a+d+g=19=9+8+2=9+7+3=8+7+4$

Le cas $b=4$ s'élimine facilement car $a+c=15=8+7$, et parmi g ou h, l'un répèterait 4, 7 ou 8.

b	e	$d+f$	$a+c$	$g+h$	$a+d+g$	a	c	d	f	g	h
2	3	$8=7+1$	$17=9+8$	$5+4$	$8+7+4$	8	9	7	1	4	5
3	2	$9=5+4$	$16=9+7$	$8+1$	$8+7+4$	7	9	4	5	8	1
		$9=8+1$		$5+4$				8	1	4	5

Réponse : 3 solutions.

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 2 & 9 \\ + & 7 & 3 & 1 \\ + & 4 & 6 & 5 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 5 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} & 9 & 1 & 5 \\ + & 2 & 3 & 6 \\ + & 8 & 7 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 3 & 9 \\ + & 4 & 2 & 5 \\ + & 8 & 6 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 5 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} & 9 & 5 & 1 \\ + & 3 & 2 & 6 \\ + & 7 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 3 & 9 \\ + & 8 & 2 & 1 \\ + & 4 & 6 & 5 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 5 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} & 9 & 1 & 5 \\ + & 3 & 2 & 6 \\ + & 7 & 8 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

13 Un sport neuf ?

Puisque $\overline{SKI}$ est un multiple de 11, $\overline{GOLF} = 9 \times \overline{SKI}$ est un multiple de 99.
D'où $\overline{GOLF} = 100 \times \overline{GO} + \overline{LF} \equiv \overline{GO} + \overline{LF} \equiv 0 \pmod{99}$.
Comme $0 < \overline{GO} + \overline{LF} < 2 \times 99$, il vient $\overline{GO} + \overline{LF} = 99$.
Donc (0) $O + F = 9 = G + L$.
Par ailleurs, $\overline{GOLF} + \overline{SKI} = \overline{SKI0}$, d'où avec d et c retenues parmi 0 ou 1 :

- (1) $F + I = 10$
- (2) $1 + L + K = I + 10d$
- (3) $d + O + S = K + 10c$
- (4) $c + G = S$

Comme $G \neq S$, il vient dans (4) $c = 1$ et $1 + G = S$.
(0) et (1) entraînent $I = O + 1$ et $S + L = 10$.
$\overline{SKI}$ est un multiple de 11 se traduit par $S + I \equiv K \pmod{11}$.
(3) implique alors $d \equiv 0 \pmod{11}$, d'où $d = 0$.
Comme $F + I = 10 = S + L$, ces 4 lettres sont dans $E = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$.
(2) entraîne $I \geqslant 4$ et $O = K + L$.
Nous allons examiner quatre cas selon la valeur de I en utilisant les relations :

- $F = 10 - I$
- $O = I - 1$
- $K + L = O$ avec $L \in E$
- $S = 10 - L$
- $G = S - 1$

I	F	O	L	K	S	G	$\overline{GOLF}$
4	6	3	2	1	8	7	7326
6	4	5	2	3	8	7	7524
			3	2	7	6	-
7	3	6	2	4	8	7	-
			4	2	6		-
8	2	7	3	4	7		-
			4	3	6	5	5742
			6	1	4	3	3762

Variante suggérée par Rémi PEYRE

Comme $\overline{SKI}$ est un multiple de 11, posons $\frac{\overline{SKI}}{11} = \overline{AB}$.
Alors $\overline{GOLF} = (100 - 1) \times \overline{AB} = \overline{AB00} - \overline{AB}$.
D'où $F = 10 - B$, $L = 9 - A$, et :

- $O = B - 1$ et $G = A$

ou

- $O = 9 + B$ et $G = A - 1$

Comme $O \neq 9$, nous en déduisons que $G = A$.
Remarque : sans cet argument, nous aurions $B = 0 = I = F$.
Ensuite $\overline{SKI} = (10 + 1) \times \overline{AB} = \overline{AB0} + \overline{AB}$.
D'où $I = B$, $K = A + B - 10$ et $S = A + 1$, car si $K = A + B$, alors nous aurions $S = A = G$.
Toutes les lettres sont paramétrées en fonction de $A = G$ et $B = I$.
Examinons alors les contraintes sur une matrice 8×8 et on élimine :

- $A + B \leqslant 10$ car $K = A + B - 10 \geqslant 1$
- $A = 8$ car sinon $S = 9$
- $A = 4$ car sinon $S = L$
- $B = 5$ car sinon $F = B$
- $A = B$ car sinon $G = I$
- $A = B - 1$ car sinon $G = O$

- $A = B - 2$ car sinon $S = O$

$A \setminus B$	4	6	8
3	X	X	
5	X	X	
7			X

Les 4 cas restants fournissent alors des solutions.

A	B	G	O	L	F	S	K	I
3	8	3	7	6	2	4	1	8
5	8	5	7	4	2	6	3	8
7	4	7	3	2	6	8	1	4
7	6	7	5	2	4	8	3	6

Variante suggérée par Rodolfo NIBORSKI

Posons $s = G + L$ et $t = O + F$.
$\overline{GOLF}$ est un multiple de 9 et 11, d'où :

- (1) $s + t \equiv 0 \pmod 9$
- (2) $s \equiv t \pmod{11}$

Comme $3 \leqslant s, t \leqslant 15$, (2) implique $s = t$, $s = t + 11$ ou $s = t - 11$.
Les deux derniers cas ne seraient possibles qu'avec $\{s, t\} = \{3, 14\}$ ou $\{4, 15\}$, incompatibles avec (1).
Ainsi par (1) $s = t = 9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$.
Il y a six possibilités de choisir deux décompositions parmi les quatre : examinons alors parmi les quatre chiffres inutilisés s'il y en a trois pour former $\overline{SKI}$.
$\overline{SKI}$ étant multiple de 11, nous avons $S + I = K$ ou $S + I = K + 11$.
Dans le premier cas, $K > S$ ce qui impliquerait $G = S$ puisque $\overline{SKI}$ et $9 \times \overline{SKI}$ partageraient un même premier chiffre.
Ainsi $S + I = K + 11 \geqslant 12$.

$\{G, L, O, F\}$	chiffres pour $\overline{SKI}$	$S + I = K + 11$	$\overline{SKI}$
$\{1, 2, 7, 8\}$	$\{3, 4, 5, 6\}$	-	
$\{1, 3, 6, 8\}$	$\{2, 4, 5, 7\}$	-	
$\{1, 4, 5, 8\}$	$\{2, 3, 6, 7\}$	$6 + 7 = 2 + 11$	627 ou 726
$\{2, 3, 6, 7\}$	$\{1, 4, 5, 8\}$	$8 + 4 = 1 + 11$	814 ou 418
$\{2, 4, 5, 7\}$	$\{1, 3, 6, 8\}$	$8 + 6 = 3 + 11$	638 ou 836
$\{3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 2, 7, 8\}$	-	

On vérifie que 9×627 finit par 3 et 9×726 commence par 6, chiffres ne faisant pas partie de $\overline{GOLF}$.
Les autres cas fournissent chacun une solution :

- $9 \times 814 = 7326$

- $9 \times 418 = 3762$
- $9 \times 638 = 5742$
- $9 \times 836 = 7524$

Réponse : 4 solutions, 3762, 5742, 7326 et 7524.

14 Les années passent, puis se répètent...

Posons $x = 23,24\overline{25}$ et $y = 0,\overline{25}$ où $\overline{25}$ est une période se répétant indéfiniment.
Il vient $100y = 25 + y$, d'où $y = \frac{25}{99}$.
Ainsi $100x = 2324 + y$, ou encore $x = \frac{230101}{9900}$.
Cette fraction est irréductible, son numérateur ne partageant aucun des facteurs premiers du dénominateur (2, 3, 5 ou 11).
Réponse : $\frac{230101}{9900}$.

15 Écusson

Rappelons les formules d'aire d'un :

- secteur circulaire de rayon r et d'angle α rad : $\frac{1}{2}\alpha r^2$
- triangle équilatéral de côté c : $c^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

La surface blanche correspond à deux secteurs circulaires de rayon 12 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ auxquels on a ôté un triangle équilatéral de côté 12.
Elle a donc pour aire $12^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, égale à celle du rectangle gris $12 \times AC$.
D'où $AC = 4\pi - 3\sqrt{3}$.
Avec l'approximation proposée, $AC \approx 4 \times 3,142 - 3 \times 1,732 = 7,372$, soit 7,37 après arrondi au centième.
Réponse : 7,37.

16 Des losanges pas carrés

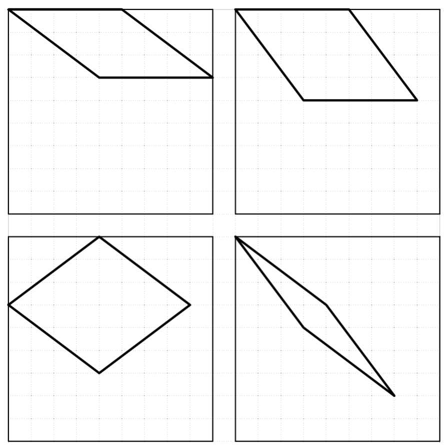
En procédant comme dans le premier problème, 5 est l'unique longueur entière permettant de réaliser des losanges non carrés.
En effet c'est la seule solution de l'équation diophantienne $L^2 = x^2 + y^2$ avec $0 < x < y < 10$.
Soient les vecteurs $a = (4,3)$, $b = (5,0)$, $c = (4,-3)$ et $d = (3,-4)$.
Dénombrons les losanges selon leur type (engendré par 2 vecteurs) :

Type	Ligne	Colonne	Symétries	Total
bc	1	7	4	28
bd	2	6	4	48
ac	2	4	2	16
cd	3	3	2	18

La colonne Total est le produit de trois nombres :

- Ligne : le nombre d'exemplaires en ligne (10 moins la somme des valeurs absolues des abscisses des vecteurs)
- Colonne : le nombre d'exemplaires en colonne (idem avec les ordonnées)
- Symétries : le nombre d'orientations différentes, en examinant les symétries du carré

Remarque : on écarte le type ab équivalent à bc, et le type ad losange carré.



Cela fait donc $28 + 48 + 16 + 18 = 110$ losanges au total.
Réponse : 110.

17 La quadrature du carré

Quelques cas sont simples à dénombrer :

- 1 pavage par un carré 5×5

Remarque : l'énoncé mentionnant un pluriel (paver avec *des* carrés), fallait-il compter ce pavage trivial ?

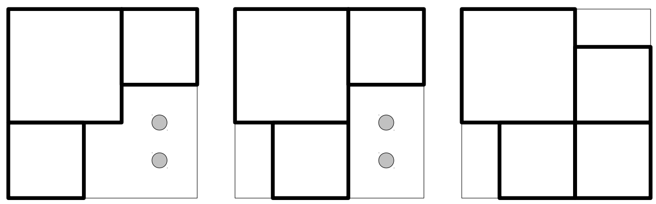
- 1 pavage par un carré 4×4 et le reste avec des carrés 1×1
- 3 pavages avec 1 carré 3×3, cela correspond à la position du carré (angle, milieu d'arête, ou intérieur), et le reste avec des carrés 1×1
- 3 pavages avec 1 carré 2×2, idem, et le reste avec des carrés 1×1
- 1 pavage avec 25 carrés 1×1

Pour les autres pavages, voici leur nombre en fonction du nombre et du type de carrés.

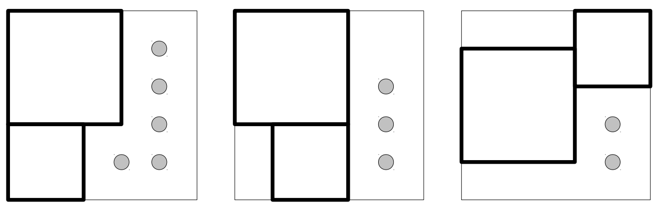
Carré \ Pavages	5	10	6	14	20	13
3×3	1	1	1	0	0	0
2×2	3	2	1	4	3	2

Dans les illustrations ci-après, un rond désigne un emplacement du centre d'un carré 2×2.

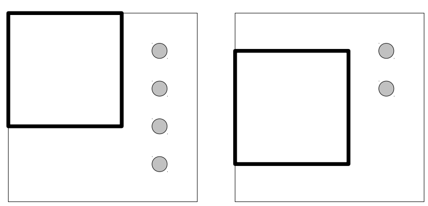
- 5 :



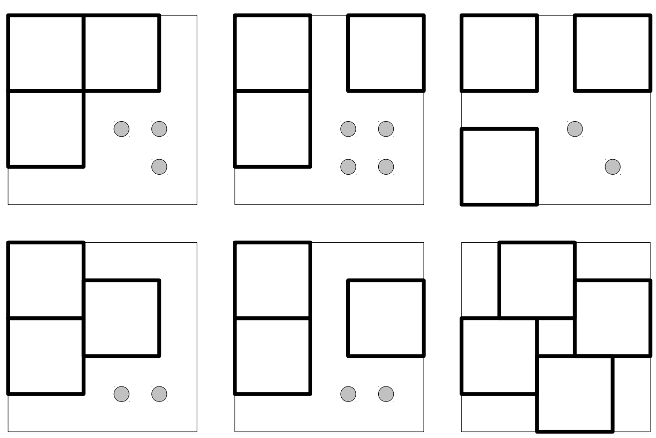
- 10 :

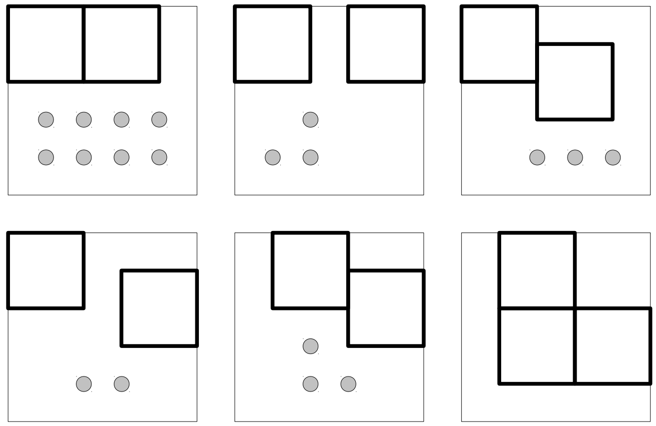
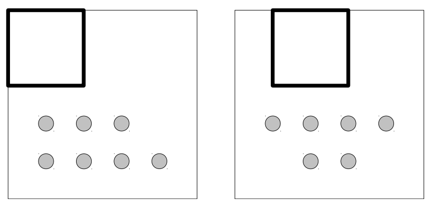


- 6 :



- 14 :



- 20 : 
- 13 : 

Ainsi cela fait $1 + 1 + 5 + 10 + 6 + 3 + 14 + 20 + 13 + 3 + 1 = 77$ pavages.

Variante suggérée par Martial HUE

Oublier un cas ou en compter un en double est un risque bien réel.
A l'aide du lemme de Burnside, on peut évaluer le total des pavages comme la moyenne de ceux fixés par les 8 symétries du carré : s est la somme pondérée des cinq colonnes, en précisant que r (rotation de 90°), | (symétrie axe vertical) et / (symétrie diagonale montante) comptent doubles, pour r^3 (rotation de 270°), - (symétrie axe horizontal) et \ (symétrie diagonale descendante). La division par 8 est alors un redoutable détecteur d'erreur.

n_3	n_2	Id	r	r^2	$\mid$	$/$	s	$\frac{s}{8}$
1	3	32	0	0	0	4	40	5
1	2	68	0	0	2	4	80	10
1	1	44	0	0	0	2	48	6
1	0	9	1	1	3	3	24	3
0	4	79	3	7	3	7	112	14
0	3	140	0	0	0	10	160	20
0	2	78	0	6	4	6	104	13
0	1	16	0	0	0	4	24	3
0	0	1	1	1	1	1	8	1

Avec $(n_3, n_2) = (0, 4)$, les habitués du championnat auront reconnu un cas particulier du problème 18 les menteurs du deuxième jour de la finale internationale du 38ème championnat.

Chacun des quatre carrés est contraint, et se place parmi quatre emplacements, je mets sur chaque carré deux booléens: gauche ou droite, haut ou bas.
Les deux carrés du haut peuvent choisir parmi trois possibilités (droite-gauche est à éliminer car ils se chevauchent) :

- gauche-gauche
- gauche-droite
- droite-droite

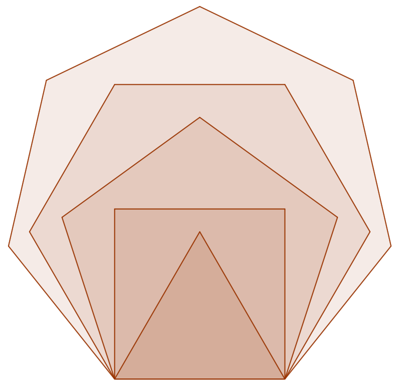
Pour les deux lignes et les deux colonnes, c'est similaire, ça donne 3^4 configurations.
Parmi ces 81 possibilités, deux sont à écarter, parce qu'elles se chevauchent en diagonale, d'où le total 79.
Pour le cas avec 3 carrés, une manière de procéder pour dénombrer 140 est de remplir huit matrices d'entiers, selon la position du premier (x) et deuxième carré (un entier, le nombre de manières de placer le troisième).

x-88 --56 4212 2100	-x-8 ---6 4212 2100	--x- 6--- 4212 2100	---x 65-- 4212 2100	---- x-44 --12 2100	---- -x-4 ---2 2100	---- --x- 2--- 2100	---- ---x 21-- 2100

Référence : Nombre de façons de placer 1 à 4 rois qui ne s'attaquent pas sur un échiquier 4x4 permettant de retrouver les valeurs 1, 16, 78, 140, 79 dans le cas $n_3 = 0$.
Réponse : 77

18 Le polygone de Mathias

Dans un polygone régulier tous les sommets sont situés dans un même demi-plan de frontière un côté, aussi nous écartons OQ et PR.
Remarque : les valeurs approchées données dans l'énoncé suggèrent fortement un triangle équilatéral (voire hexagone) ou un pentagone.
Il reste 4 cas à étudier (on sent bien 1 triangle équilatéral pour chaque) et comme il est demandé 2 solutions en épreuve, il suffit de trouver les 2 plus simples à calculer, à savoir les triangles équilatéraux s'appuyant sur OP et PQ. Mais pour obtenir tous les points, encore fallait-il évaluer correctement le nombre de solutions puisqu'il y a aussi un pentagone.
Le problème se traite bien par la géométrie analytique, mais il convient d'être soigneux et de procéder à quelques vérifications par le calcul pour confirmer ce qu'un dessin semblerait laisser penser.
Nous utiliserons le lemme : si P_n est un polygone régulier de $n \geqslant 3$ côtés situé dans le même demi-plan délimité par un segment d'appui alors $P_n \subset P_{n+1}$.
Preuve sans mot.

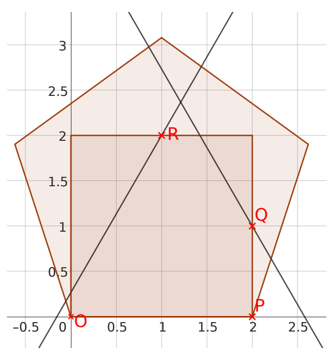


Cas OP : un triangle

R est sur une droite de pente $\tan\frac{\pi}{3}$ ayant pour équation $y = (x-1)\sqrt{3} + 2$. Elle coupe l'axe des abscisses en $x = -\frac{2}{\sqrt{3}} + 1$.

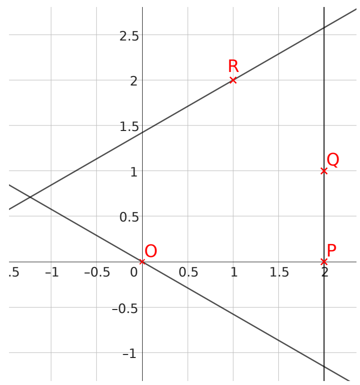
Q est sur une droite de pente $-\tan\frac{\pi}{3}$ ayant pour équation $y = (2-x)\sqrt{3} + 1$. Elle coupe l'axe des abscisses en $x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Par différence, le côté du triangle équilatéral vaut $1 + \sqrt{3} \approx 2,73$.
Un carré, de côté 4, aurait O et P comme sommets, inutile d'aller au-delà.

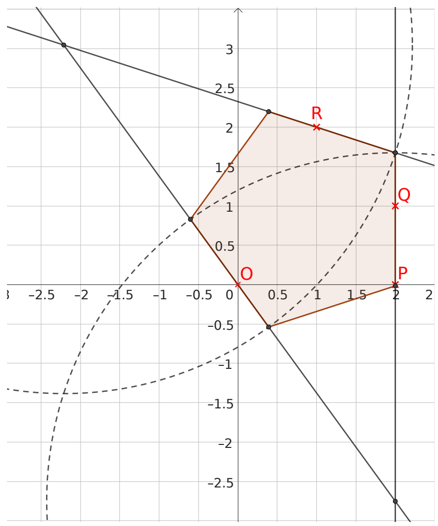


Cas PQ : un triangle et un pentagone

R est sur une droite de pente $\tan\frac{\pi}{6}$ qui a donc pour équation $y = \frac{(x-1)}{\sqrt{3}} + 2$. Elle coupe la droite $x = 2$ en $y = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2$.
O est sur la droite d'équation $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$. Elle coupe la droite $x = 2$ en $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.
Par différence, le côté du triangle équilatéral vaut $2 + \sqrt{3} \approx 3,73$.



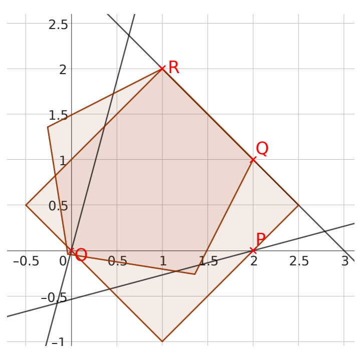
Comme dans le cas précédent, un carré, de côté 4, aurait O et P comme sommets.
Il reste le pentagone.
R est sur une droite de pente $-\tan\frac{\pi}{10}$ qui a donc pour équation $y = 2 - (x-1)\tan\frac{\pi}{10}$. Elle coupe la droite $x = 2$ en $y = 2 - \tan\frac{\pi}{10}$.
O est sur la droite d'équation $y = -x\tan\frac{3\pi}{10}$. Elle coupe la droite $x = 2$ en $y = -2\tan\frac{3\pi}{10}$.
Remarque : de manière rigoureuse, il faudrait vérifier qu'un des sommets du pentagone est bien en-dessous de P.
La différence entre les deux ordonnées vaut $c\,(1+\varphi)$ où $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ désigne le nombre d'or et c la longueur du côté du pentagone régulier.
Nous en déduisons $c = \frac{2-\tan\frac{\pi}{10}+2\tan\frac{3\pi}{10}}{1+\varphi}$.
Sachant que $2\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{\varphi}$ et que $s = \sin\frac{\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}$ est donnée en valeur approchée, nous en déduisons $t = \tan\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2s\varphi^2} = \frac{1}{2s(1+\varphi)} = \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{4s}$.
Comme $\tan\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}}$ et que $\tan\frac{\pi}{5} = \frac{2t}{1-t^2}$, il vient $c = \frac{2-t+\frac{\left(1-t^2\right)}{t}}{1+\varphi}$.
Soit finalement $c = 3 - \sqrt{5} - \frac{7-3\sqrt{5}}{2s} + 2s \approx 1,69$



On peut vérifier que O est strictement à l'intérieur de l'hexagone ou de l'heptagone passant par P, Q et R, ainsi que de l'octogone s'appuyant sur PQ, il est inutile d'aller au-delà.

Cas QR : un triangle

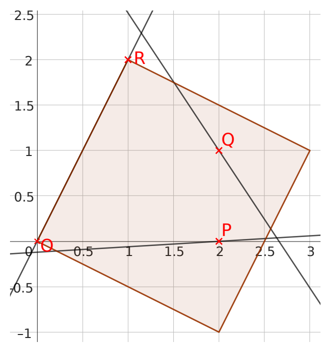
Les équations des trois droites sont $3-x$, $x\tan 75$ et $(x-2)\tan 15$.
On a $\tan 75 = \tan(45+30) = 2+\sqrt{3}$ et $\tan 15 = \frac{1}{\tan 75} = 2-\sqrt{3}$.
Le côté du triangle équilatéral vaut $\sqrt{2}\left(1+2\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 3,05$.
Remarque : c'est étrange que l'énoncé ne fournisse pas une valeur approchée de $\sqrt{2}$.
Un carré, de côté $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, aurait R comme sommet.
O étant strictement intérieur au pentagone régulier s'appuyant sur QR, inutile d'aller au-delà.



Cas OR : un triangle

Les équations des trois droites sont $2x$, $\frac{5\sqrt{3}-8}{11}(x-2)$ et $-\frac{8+5\sqrt{3}}{11}(x-2)+1$.

Le côté du triangle équilatéral vaut $\frac{\sqrt{5}}{15}\left(6+7\sqrt{3}\right) \approx 2,70$.
Pas de carré car la distance de Q à OR est strictement inférieure à la longueur OR, inutile d'aller au-delà .



Réponse : 5 solutions, 1,69, 2,70, 2,73, 3,05 et 3,73.